III. országos magyar matematikaolimpia
XXX. EMMV
megyei szakasz, 2020. január 18.

VIII. osztály

1. feladat. Határozd meg az összes olyan derékszögű háromszöget, melynek befogói $\overline{abab}$ és $\overline{cdcd}$ alakú négyjegyű számok, átfogójuk pedig 2020-szal egyenlő!

2. feladat. Egy halom kukoricaszemen hét hörcsög osztozkodik. Mindenki egyforma számú szemben szeretne részesedni, ellenben két megmaradt mag felett tanácstalanul állnak. Ekkor még egy társuk jelenik meg, akinek elmondják, hogyan jártak. Ő elkezd gondolkozni, és a következőt javasolja: ültessünk el négy szemet a jövő évi termés reményében, majd a megmaradt magokat osszuk el egyenlő arányban. Egyetértenek, kertészkedés után újra osztozkodnak. Megelégedetten nyugtázzák, hogy az osztás sikeres, igaz mindannyian hét szemmel kevesebb kukoricát fogyaszthattak így el. Hány mag volt eredetileg a halomban?

3. feladat. Az $ABCDA'B'C'D'$ szabályos négyoldalú hasábban $AB = BC = 6$ cm és $AA' = 8$ cm. Legyen az E, F és G pont a DD', AD, illetve DC élek felezőpontja.

a) Igazold, hogy az (ACD') sík párhuzamos az (EFG) síkkal!

b) Számítsd ki az EFG háromszög területét, valamint az EFG és ACD' háromszögek területeinek arányát!

c) Határozd meg a $B'E$ szakasz hosszát!

4. feladat. Ha $2a - 16b - 7 = 0$ és $a \in [-\frac{25}{2}, \frac{7}{2}]$, akkor bizonyítsd be, hogy

$$\sqrt{(2a-7)^2 - 60b^2} + \sqrt{(2a+25)^2 - 60(b+2)^2} = 28.$$

Megjegyzés: Minden feladat kötelező, munkaidő: 3 óra.